Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 90 minutos.

---

1) **[20 ptos.]** Considere la recta

$$L : (k^2 - 1)x - 4y + 1 = 0.$$

   a) **[12 ptos.]** Determine el(los) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ de modo que L sea paralela a la recta $y - 2x - 1 = 0$.

   b) **[8 ptos.]** Considere $k = 2$. Calcule la distancia entre el punto $P(9, 2)$ y L.

2) **[20 ptos.]** Considere la circunferencia $C : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

   a) **[10 ptos.]** Realice la gráfica de la circunferencia C indicando claramente el centro y el radio.

   b) **[10 ptos.]** Obtenga la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(6, 4)$.

3) **[20 ptos.]**

   a) **[8 ptos.]** Resuelva la inecuación $x^2 - 10 \leq x + 2$.

   b) **[12 ptos.]** Resuelva la inecuación $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| < 2$.

PAUTA

1) a) La pendiente de la recta $y - 2x - 1 = 0$ es dada por $m = 2$ (3 pts.), de esta forma la pendiente de L debe ser también $m = 2$. (3 pts.)

Por la ecuación de la recta L se tiene que su pendiente es $m = \dfrac{(k^2-1)}{4}$ (3 pts.), así se debe tener que

$$\begin{aligned} \frac{(k^2-1)}{4} &= 2 \\ k^2 - 9 &= 0 \\ (k-3)(k+3) &= 0 \end{aligned}$$

Luego los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que L sea paralela a la recta $y - 2x - 1 = 0$ son $k = 3$ y $k = -3$. (3 pts.)

b) Reemplazando $k = 2$, se tiene la recta $L : 3x - 4y + 1 = 0$ (2 pts.). Luego tomando $P(9, 2)$ la distancia de P a L es dada por

$$d(P, L) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \text{(3 por emplear bien la fórmula + 3 por calcular correctamente pts.)}$$

2) a) Se obtiene el centro y el radio de la circunferencia C completando cuadrados,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= 20 + 4 + 1 \text{(4 pts.)} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 5^2 \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

Luego el centro de la circunferencia es $(2, 1)$ y el radio es 5. (3 pts.)

b) La pendiente de la recta que pasa por el centro $(2, 1)$ de la circunferencia y el punto $(6, 4)$ es $m = \dfrac{4-1}{6-2} = \dfrac{3}{4}$. (3 pts.) Por lo tanto la pendiente de la recta tangente es $m_{tan} = -\frac{4}{3}$. (4 pts.) Así la ecuación de la recta tangente es dada por

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{4}{3}(x - 6) \\ 3y - 12 &= -4x + 24 \\ 4x + 3y - 36 &= 0 \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

3) a)

$$\begin{aligned} x^2 - 10 &\leq x + 2 \\ x^2 - x - 12 &\leq 0 \\ (x-4)(x+3) &\leq 0 \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

$-\infty \quad -3 \quad 4 \quad +\infty$

$x - 4$	-	-	+	
$x + 3$	-	+	+	(3 pts.)
$(x-4)(x+3)$	+	-	+	

Por lo tanto la solución es dada por $S = [-3, 4]$. (2 pt.)

b)

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 2 \iff -2 < \frac{x+2}{x-1} < 2 \text{(2 pts.)}$$

Luego resolvemos las inecuaciones

I)

$$-2 < \frac{x+2}{x-1} \iff 0 < 2 + \frac{x+2}{x-1} \iff 0 < \frac{3x}{x-1}. \text{(2 pts.)}$$

Utilizamos la tabla

	$-\infty$	0	1 $+\infty$
$3x$	-	$+$	$+$
$x-1$	-	-	$+$
$\frac{3x}{x+1}$	$+$	-	$+$

Así tenemos la solución I) dada por $S_1 =]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, +\infty[$. (2 pts.)

II)

$$\frac{x+2}{x-1} < 2 \Longleftrightarrow \frac{x+2}{x-1} - 2 < 0 \Longleftrightarrow \frac{4-x}{x-1} < 0.\text{(2 pts.)}$$

Utilizamos la tabla

	$-\infty$	1	4 $+\infty$
$4-x$	$+$	$+$	-
$x-1$	-	$+$	$+$
$\frac{4-x}{x+1}$	-	$+$	-

Así tenemos la solución II) dada por $S_2 =]-\infty, 1[\ \cup\ ]4, +\infty[$ (2 pts.)

La solución final es dada por $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, 0[\ \cup\ ]4, +\infty[$ (2 pts.)